TEMA 9: TRIGONOMETRÍA Y RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

1. Medida de ángulos y circunferencia goniométrica

1.1. Medida de ángulos

a) Medida en grados: Un grado es la medida del ángulo que resulta al dividir un ángulo recto en 90 partes iguales, además 1º=60´ 1´=60´´

b) Medida en radianes: Un radián es la medida del ángulo cuyo arco tiene la misma longitud que el radio con el que dibuja dicho arco. Se represente por *rad*

1.2 Paso de grados a radianes y viceversa

Para pasar entre grados y radianes se tiene en cuenta que: $180^{\circ} = \pi\, rad$

De aquí podemos deducir:

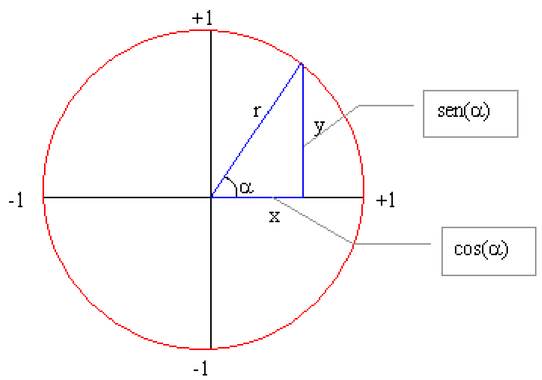
- Paso de grados a radianes: Se multiplica por $\dfrac{\pi}{180}$
- Paso de radianes a grados: Se multiplica por $\dfrac{180}{\pi}$

1.3. Ángulos mayores que 360º

Si un ángulo es mayor que 360º es equivalente a otro ángulo que se diferencia de él un número entero de circunferencias. La forma general es: $\alpha = \alpha' + 360^{\circ} \cdot k \ , \quad k \in \mathbb{Z}$

1.4. Circunferencia goniométrica

La circunferencia goniométrica es una circunferencia de radio 1. En ella tomando el ángulo central α (como en el dibujo) y tomando el punto correspondiente sobre ella, el seno del ángulo se corresponde con su coordenada vertical y el coseno del ángulo con su coordenada horizontal.
Esto nos permite calcular las razones trigonométricas de ángulos mayores que 90º.



1.5. Signo y recorrido de las razones trigonométricas

Cuadrante	Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
1º	$0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$	+	+	+
2º	$90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$	+	-	-
3º	$180^{\circ} < \alpha < 270^{\circ}$	-	-	+
4º	$270^{\circ} < \alpha < 360^{\circ}$	-	+	-

Ejercicios

1) Pasa los siguientes ángulos a radianes: a) 30º b) 120º c) 270º d) 315º

2) Pasa los ángulos siguientes a grados:
a) $\pi/2\ rad$ b) $3\pi/5\ rad$ c) $7\pi/3\ rad$ d) $53\pi/6\ rad$

3) Determina las el resto de las razones trigonométricas de α sabiendo que está en el segundo cuadrante y que $sen\,\alpha = 0'2$

4) Determina las el resto de las razones trigonométricas de α sabiendo que está en el tercer cuadrante y que $\cos\alpha = -0'7$

5) Determina las el resto de las razones trigonométricas de α sabiendo que está en el cuarto cuadrante y que $sen\,\alpha = -0'4$

6) Dibuja en la circunferencia los ángulos siguientes: a) 1485º b) 2370º c) 2100º

2. Reducción de razones, identidades y ecuaciones

2.1. Reducción de razones trigonométricas al primer cuadrante

Para reducir un ángulo al primer cuadrante se dibuja el ángulo en la circunferencia unidad y se busca en el primer cuadrante otro cuyas razones trigonométricas sean "iguales" (salvo signos) a las del ángulo inicial.

2.2. Identidades trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una igualdad que se verifica para cualquier valor de la variable (ángulo)

Ejemplo: $\left(sen\,\alpha + \cos\alpha\right)^2 = 1 + 2sen\,\alpha \cdot \cos\alpha$

2.3. Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es una ecuación en la que la variable x es el ángulo de alguna razón trigonométrica.

Ejemplo: $\cos^2 x + \cos x = sen^2 x$

$$\cos^2 x + \cos x = sen^2 x \to \cos^2 x + \cos x = 1 - \cos^2 x \to 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$Hacemos\ el\ cambio\ \ t = \cos x \to 2t^2 + t - 1 = 0 \quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} t = 1/2 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$t = \cos x = 1/2 \to \begin{cases} x_1 = 60 + 360^{o} k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 300^{o} + 360^{o} k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$t = \cos x = -1 \to x_3 = 180^{o} + 360^{o} k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicios

1) Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan:

a) $sen\alpha = 3/4$ b) $\cos\alpha = -1/4$ c) $\sec\alpha = 2'5$ d) $tg\alpha = 2$

2) Calcula, reduciendo al primer cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

a) $\cos 120^{o}$ b) $sen 300^{o}$ c) tg210º d) $sen 135^{o}$

3) Calcula, reduciendo al primer cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

a) $sen 1830^{o}$ b) $\cos 1230^{o}$ c) $tg\, 2385^{o}$ d) $\cos 2820^{o}$

4) Demuestra que:

a) $\sec^2 x - tg^2 x = 1$ b) $\left(\cos ecx + tgx\right)\cos x = senx + \cot gx$

5) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $2senx = 1$ b) $\cos x = \sec x$ c) $2\cos x = \sqrt{3}$

d) $3senx - 2\cos^2 x = 0$ e) $sen 2x = 1$ f) $senx \cdot \cos x = 0$

1.3. Resolución de triángulos

1) En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa a= 5 m. y un cateto b=4 m. Calcula los demás elementos

2) En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa a= 4´5 m. y el ángulo B=35º 24´ 17´´. Calcula los demás elementos

3) En un triángulo rectángulo se conocen el cateto b= 2´8 m. y el ángulo opuesto B= 47º 35´ 20´´. Calcula los demás elementos

4) En un triángulo rectángulo se conocen los dos catetos b=4´5 m y c=3´5 m. Calcula los demás elementos.

5) Una antena de telefonía movil está en una llanura dentro de una cerca en la que está prohibido el paso. Para hallar su altura, medimos desde un punto exterior el ángulo de elevación y se obtiene 65º. Nos alejamos 50 m. y el nuevo ángulo de elevación es de 43º. Calcula la altura de la antena.

6) Calcula el área de un heptágono regular en el que el lado mide 3´6 cm.

7) Calcula el área de un prisma regular pentagonal en el que la arista de la base mide 6 m. y la altura 15 m.

8) Para medir la altura de una catedral, medimos el ángulo de elevación de la parte más alta desde un punto determinado y obtenemos 38º. Nos acercamos 100m y el nuevo ángulo de elevación es de 68º. Halla la latura de la catedral.

Ejercicios

A) Pasa los siguientes ángulos a radianes:
a) 45º b) 150º c) 210º d) 330º

B) Pasa los ángulos siguientes a grados:
a) $210\pi\, rad$ b) $\pi/9\, rad$ c) $5\pi/3\, rad$ d) $\pi/18\, rad$

C) Determina todas las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que $\cos\alpha = -0'8$ y el ángulo α está en el tercer cuadrante.

D) Si la $tg\alpha = -0'5$ y α está en el 4º cuadrante, determina el resto de sus razones trigonométricas.

E) Si el ángulo α está en el 2º cuadrante y $\cos ec\alpha = 2'5$, determina el resto de las razones trigonométricas del ángulo α.

F) Dibuja en la circunferencia goniométrica el ángulo de 45º y dibuja los segmentos que determinan sus razones trigonométricas. Calcula, utilizando el dibujo las longitudes de los segmentos.

G) Dibuja en la circunferencia goniométrica el ángulo de 240º y dibuja los segmentos que determinan sus razones trigonométricas. Calcula, utilizando el dibujo las longitudes de los segmentos.

H) Dibuja y calcula en la circunferencia unidad los ángulos que cumplan:
a) $sen\alpha = 0'7$ b) $\cos\alpha = -0'4$ c) $\cos ec\alpha = 2'5$ d) $tg\alpha = 1'5$

I) Calcula, reduciendo al primer cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:
a) $sen330º$ b) $\cos 210º$ c) $tg120º$ d) $sen240º$

J) Demuestra las siguientes igualdades:
a) $tg\alpha \cdot \cos ec\alpha \cdot (\cos\alpha - sen\alpha) = 1 - tg\alpha$ b) $tg\alpha \cdot (\cos\alpha + \cos ec\alpha - sen\alpha) = sen\alpha + \cos\alpha$

K) Demuestra la siguiente igualdad: $\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot sen^2\alpha = \cos\alpha$

L) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2sen^2 x = 1$ b) $tg\,2x = \sqrt{3}$ c) $4senx = \cos ecx$ d) $2senx + 1 = 3\cos ecx$

e) $senx = \cos^2 x + 1$ f) $senx \cdot \cos x = senx$

M) En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa a=12m. y un cateto c=7´5m. Calcula los demás elementos.

N) En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa a=7´2m. y el ángulo B=42º 35´ 23´´. Calcula los demás elementos

Ñ) En un triángulo rectángulo se conocen el cateto c=6´4 cm y el ángulo contiguo B=56º 23´ 44´´. Calcula los demás elementos

O) En un triángulo rectángulo se conocen lo dos catetos b=9´5 cm. y c=7´6 cm. Calcula los demás elementos

P) Una torre de alta tensión está colocada dentro del mar sobre un soporte. Desde la orilla se mide el ángulo de elevación y se obtiene 67º. Alejándose en la misma dirección 50 m., el ángulo de elevación es ahora de 25º. Calcula la altura de la torre.

Q) Calcula la apotema de un octógono regular en el que el lado mide 7´2 cm.

R) Calcula el volumen de una pirámide regular cuadrangular en la que la arista de la base mide 6 cm y el ángulo que forma la base con las caras laterales es de 65º.

S) Se quiere medir la anchura de un río, para ello se observa un árbol que está en la otra orilla. Se mide el ángulo de elevación desde esta orilla a la parte más alta del árbol y se obtienen 53º. Alejándose 30m del río se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 35º. Calcula la anchura del río.

Soluciones:

A) a) $\pi/4rad$ b) $5\pi/6rad$ c) $7\pi/6rad$ d) $11\pi/6rad$ B) a) 0º b) 20º c) 300º d) 10º

C) $sen\alpha = -0{\acute{}}6 \quad \cos\alpha = -0{\acute{}}8 \quad tg\alpha = 0{\acute{}}75$ D) $sen\alpha = -\sqrt{5}/5 \quad \cos\alpha = 2\sqrt{5}/5 \quad tg\alpha = -0{\acute{}}5$

E) $sen\alpha = 2/5 \quad \cos\alpha = -\sqrt{21}/5 \quad tg\alpha = 2\sqrt{21}/21$ H) a) $\left.\begin{array}{l} 44^\circ 25' 37'' + 360^\circ k \\ 315^\circ 34' 23'' + 360^\circ k \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$

b) $\left.\begin{array}{l} 113^\circ 34' 41'' + 360^\circ k \\ 246^\circ 25' 19'' + 360^\circ k \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$ c) $\left.\begin{array}{l} 23^\circ 34' 41'' + 360^\circ k \\ 156^\circ 25' 19'' + 360^\circ k \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$ d) $56^\circ 18' 36'' + 180^\circ k,\ k \in \mathbb{Z}$

I) a) –0´5 b) $-\sqrt{3}/2$ c) $-\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}/2$ L) a) $x = 45^\circ + 90^\circ k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x = 30^\circ + 90^\circ k,\ k \in \mathbb{Z}$ c) $\left.\begin{array}{l} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$ d) $x = 90^\circ + 360^\circ k,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $x = 90^\circ + 360^\circ k,\ k \in \mathbb{Z}$ f) $x = 0^\circ + 180^\circ k,\ k \in \mathbb{Z}$

M) $a = 12 \quad b = 9{\acute{}}37 \quad c = 7{\acute{}}5 \quad A = 90^\circ \quad B = 51^\circ 19' 4'' \quad C = 38^\circ 40' 56''$

N) $a = 7{\acute{}}2 \quad b = 4{\acute{}}87 \quad c = 5{\acute{}}30 \quad A = 90^\circ \quad B = 42^\circ 35' 23'' \quad C = 47^\circ 24' 37''$

Ñ) $a = 11{\acute{}}56 \quad b = 9{\acute{}}63 \quad c = 6{\acute{}}4 \quad A = 90^\circ \quad B = 56^\circ 23' 44'' \quad C = 33^\circ 36' 16''$

O) $a = 12{\acute{}}15 \quad b = 9{\acute{}}5 \quad c = 7{\acute{}}6 \quad A = 90^\circ \quad B = 51^\circ 20' 25'' \quad C = 38^\circ 39' 35''$

P) h=29´07 m. Q) ap=8´69 cm. R) V=77´20 cm^3. S) río=33.51 m.