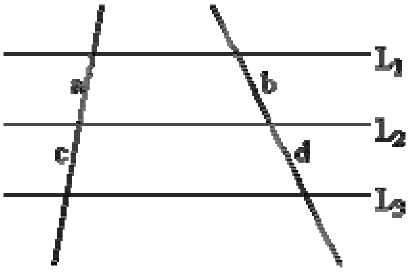
TEMA 8: SEMEJANZA Y TRIGONOMETRÍA

1. Teorema de Thales

1.1. Teorema de Thales

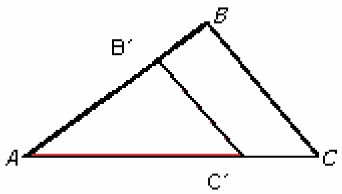
Si se trazan un conjunto de rectas paralelas entre sí: L_1, L_2, L_3, … que cortan a dos rectas r y s, los segmentos que determinan sobre las rectas r y s son proporcionales:



$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

1.2 Triángulos en posición de Thales

Dos triángulos están en posición de Thales si estos tienen un ángulo en común y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos:



Dos triángulos en posición de Thales son semejantes y verifican:

a) Los ángulos de los dos triángulos son iguales
b) Los lados correspondientes son proporcionales:

$$\frac{AB}{AB´}=\frac{AC}{AC´}=\frac{BC}{B´C´}$$

1.3. Criterios de semejanza de triángulos

1er Criterio: Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales

2º Criterio: Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que los forman proporcionales.

3er Criterio: Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales

1.4. Proporcionalidad de perímetros, áreas y volúmenes en objetos semejantes

Si dos figuras son semejantes, entonces se verifica que:

$$\frac{p}{p´}=r \qquad \frac{A}{A´}=r^2 \qquad \frac{V}{V´}=r^3$$

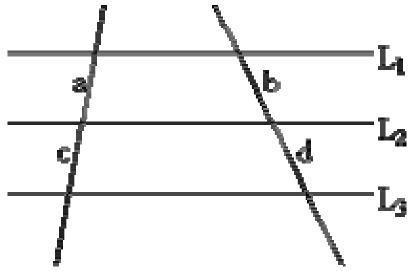
Donde p es el perímetro, A es el área y V s el volumen de las figuras. Además r, que se llama razón de semejanza el la razón que guardan los lados semejantes.

Ejercicios

1) Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4 cm. y 3 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo en posición de Thales de forma que el cateto mayor mida 8 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?
2) Dos ángulos de un triángulo miden 45º y 60º y otros dos ángulos de un triángulo miden 75º y 60º. ¿Son semejantes ambos triángulos?

3) En una foto están Ana y su madre. En la foto Ana mide 6´6 cm. y su madre 6´88 cm. Se sabe que en la realidad Ana mide 1´65 cm. ¿Cuánto mide su madre?

3) En la siguiente figura $L_1 // L_2$.



a) a = 12 cm., b = 15 cm., c = 20 cm., d = ?

b) a = (x - 1) cm., b = 4 cm., c = (2x - 4) cm., d = 7 cm. Determina las medidas de a y c.

c) a = 14 cm., c = 10 cm., b + d = 36 cm. Determina la medida de b.

d) a = 6 cm., a + c = 14 cm., b + d = 18 cm., d = ?

4) Un palo vertical de 1´75 m. proyecta una sombra de 2 m. Si la sombra de un edificio el mismo día a la misma hora y en el mismo sitio mide 24 m. ¿Cuánto mide el edificio?
5) La superficie de una esfera es de 15 m². Halla la superficie de otra esfera en la que el radio mide el triple.

2. Teorema de Pitágoras

2.1. Teorema de la altura

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinada sobre ella.

$$a^2 = m \cdot n$$

2.2 Teorema del cateto

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de cada cateto es igual al producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud de la proyección de dicho cateto sobre ella.

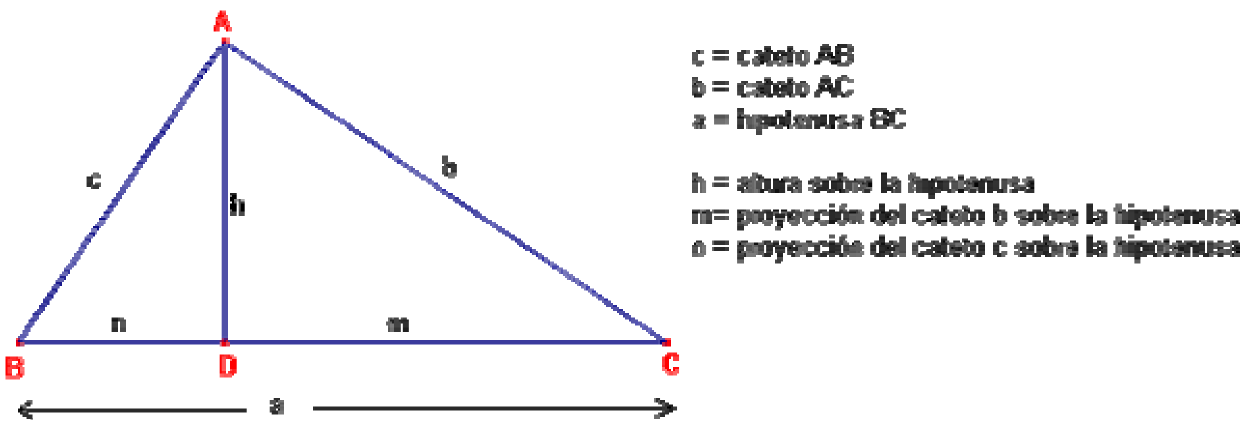
$$c^2 = a \cdot n$$

$$b^2 = a \cdot m$$

2.3. Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Ejercicios

1) En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a esta en dos segmentos de longitudes 1´5 cm. y 6 cm. Halla la longitud de dicha altura y de sus tres lados.
2) En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm. y la proyección del cateto b sobre ella mide 3´6 cm. Halla:
   a) La longitud del cateto b
   b) La longitud de la proyección del cateto c sobre la hipotenusa
   c) La longitud del cateto c
   d) La longitud de la altura relativa a la hipotenusa
   e) Dibuja el triángulo rectángulo.

3) En una pirámide cuadrangular la arista de la base mide 3 cm. y la altura 4 cm. Calcula el área lateral y el área total de dicha pirámide.

3. Razones trigonométricas

3.1 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

a) El seno de un ángulo α es la razón entre el cateto opuesto al ángulo α y la hipotenusa. La cosecante es el inverso del seno de ángulo

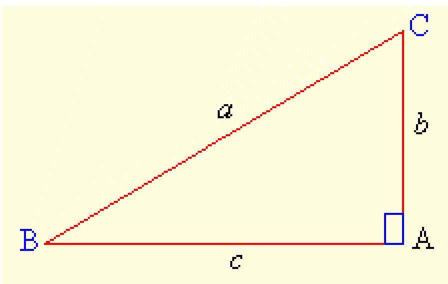
$$sen\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad \cos ec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

b) El coseno de un ángulo α es la razón entre el cateto contiguo al ángulo α y la hipotenusa. La secante es el inverso del seno de ángulo

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ contiguo}$$

c) La tangente de un ángulo α es la razón entre el cateto opuesto al ángulo α y el cateto contiguo. La cotangente es el inverso de la tangente

$$tg\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} \qquad \cot g\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto}$$



Ejercicios

1) Halla las razones trigonométricas del ángulo α en el triángulo anterior si a=15 cm., b= 9 cm., c= 12 cm.
2) Halla un ángulo que cumpla que $sen\,\alpha = 3/4$
3) Halla un ángulo que cumpla que $\cos\alpha = 5/6$
4) Calcula, usando la calculadora, el valor de las siguientes razones trigonométricas: a) $sen\,32^{o}$
   b) $\cos 68^{o}$ c) $tg\,85^{o}\,40'\,8''$ d) $sen\,46^{o}\,35'\,12''$
5) Calcula, usando la calculadora, la amplitud del ángulo α:
   a) $sen\,\alpha = 0'5765$ b) $\cos\alpha = 0'3907$ c) $tg\,\alpha = 1'8940$ d) $\cos\alpha = 0'3786$

6) Elisa y su sombra forman un ángulo recto. La sombra mide 1´2 m. y el ángulo con el que se ve la la parte superior de su cabeza desde el extremo de la sombra mide 54º 50´.Calcula la altura de Elisa.

4. Relaciones entre las razones trigonométricas

4.1. Relaciones entre las razones trigonométricas

a) Relación fundamental

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

b) Relaciones derivadas de la relación fundamental

$$tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

$$1 + \cot g^2\alpha = \cos ec^2\alpha$$

c) $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$

4.2. Razones trigonométricas de ángulos complementarios

Dos ángulos son complementarios si suman 90º

$$sen\,\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos\alpha = sen(90^\circ - \alpha)$$

$$tg\,\alpha = \cot g\,(90^\circ - \alpha)$$

4.3. Razones trigonométricas de 30º, 45º, y 60º

	sen	cos	tg
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Ejercicios

1) Sabiendo que $sen\,\alpha = 2/5$. Calcula $\cos\alpha$

2) Sabiendo que $\sec\alpha = 17/8$. Calcula $tg\,\alpha$

3) Sabiendo que $tg\,\alpha = 3$. Calcula $sen\,\alpha$

4) Calcula el coseno de 40º sabiendo que sen 50º=0´7660

5) Sabiendo que $sen\,\alpha = 1/4$, calcula las demás razones trigonométricas de α.

6) Sabiendo que $sen\,20^\circ = 0{\acute{}}3420$, calcula:

a) $\cos 70^\circ$ b) $sen\,70^\circ$ c) $tg\,20^\circ$ d) $tg\,70^\circ$

7) Simplifica las siguientes expresiones: a) $\cos\alpha + sen\,\alpha \cdot tg\,\alpha$ b) $\dfrac{1+tg^2\alpha}{\sec\alpha}$

Ejercicios

A) Halla la altura de un edificio que proyecta una sombra de 56 m. a la misma hora que un árbol de 21 m. proyecta una sombra de 24 m.

B) En un mapa, la distancia entre La Coruña y Lugo es de 19 cm., entre Santiago de Compostela y La Coruña 12 cm, y entre Santiago de Compostela y Lugo 20 cm. En otro mapa, la distancia entre Santiago de Compostela y La Coruña es de 18 cm. ¿Cuáles serán las otras dos distancias medidas en este segundo mapa?

C) En un mapa a escala 1:10.000.000, la distancia entre dos ciudades es de 12 cm. ¿Cuál es la distancia real que las separa?

D) Tenemos dos triángulos isósceles semejantes. Del pequeño conocemos que cada uno de los lados iguales mide 5 cm y el lado desigual 3 cm; pero del grande, sólo sabemos que el lado desigual mide 7 cm. ¿Cuánto mide cada uno de los otros dos lados?

E) Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 5 cm.

F) Sabiendo que en un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 25 m y un cateto 7 m, halla el otro cateto.

G) Halla la altura y el área de un triángulo equilátero de 2,5 m de lado.

H) Un poste vertical de 3 m proyecta una sombra de 2 m; ¿qué altura tiene un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 4,5 m?

I) Las longitudes de los lados de un campo triangular son 125 m, 75 m y 100 m. Se hace a escala un dibujo del campo, y el lado mayor queda representado por un segmento de 3 cm. ¿Cuáles son las longitudes de los otros dos lados del triángulo en el dibujo?

J) Si un campo está dibujado a escala de 1:1200, ¿cuál será en el terreno la distancia que en el dibujo mide 18 cm?

K) ¿A qué escala está dibujado un campo, si en el plano un segmento de 12 cm representa 60 m de terreno?

L) En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 7´5 cm. y uno de los segmentos en que divide la altura correspondiente a la hipotenusa mide 6 cm. Halla la longitud de la altura y los lados del triángulo.

M) En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a esta en dos segmentos que miden 32 cm. y 18 cm. Halla la medida de dicha altura y de los catetos.

Ñ) En un triángulo rectángulo los catetos miden 3 cm. y 4 cm. Halla la longitud de la hipotenusa y el área de este.

O) En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm. y uno de los catetos mide 6 cm. Halla la longitud del otro cateto, la longitud de la altura relativa a la hipotenusa y las medidas de los segmentos en que la altura divide a la hipotenusa.

P) Resuelve los siguientes apartados:

a) Si cos $\hat{A}$ = ½; calcula sen $\hat{A}$ y tg $\hat{A}$ b) Si sen $\hat{A}$ = 4/5; calcula cos $\hat{A}$ y tg $\hat{A}$

Q) Averigua los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ sabiendo:

a) tg $\hat{A}$ = 2′5 b) sen $\hat{B}$ = 0′3 c) sen $\hat{C}$ = 0′6

R) Utilizando la calculadora, halla las siguientes rezones trigonométricas redondeando a 4 decimales:

a) sen 34º 35′ 57″ b) cos 85º 7′ 23″ c) tg 87º 33″ d) sen 43º 35′

S) Utilizando la calculadora, halla los ángulos de las siguientes razones trigonométricas:

a) sen α = 0,3456 b) cos α = 0,5555 c) tg α = 1,4572 d) cos α = 0,25 e) sen α = 0,0525

T) Sabiendo que $sen\alpha = \frac{2}{3}$, halla el resto de las razones trigonométricas.

U) Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, halla el resto de las razones trigonométricas.

V) Sabiendo que $tg\alpha = \frac{5}{4}$, halla el resto de las razones trigonométricas.

W) Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conoce: uno de sus ángulos, B = 37º, y su hipotenusa, a = 5′2 m.

X) Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conoce: uno de sus ángulos B = 29º, y el cateto opuesto, b = 4′5 m.

Y) Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conoce: la hipotenusa, a = 5′7m, y un cateto, b = 4′6m.

Z) Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conoce: los dos catetos, b = 3′5m y c = 2′8m.

A´) Las bases de un trapecio isósceles miden 7 y 4 metros; su altura mide 5 metros. Halla los ángulos del trapecio.

B´) Desde un punto A del suelo se observa una torre, PQ, y se la ve bajo un ángulo ∝ = 31º. Se avanza 40 m. en dirección a la torre, se mira y se la ve, ahora, bajo un ángulo β = 58º. Halla la altura h de la torre y la distancia de A al pie, Q, de la torre.

C´) Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conocen: uno de sus ángulos, B = 51º, y el cateto contiguo, c = 7′3m.

D´) Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conocen: la hipotenusa, a = 4′6m, y un cateto, c = 3′1m.

E´) De un rombo ABCD se conocen la diagonal $\overline{AC}$ = 4m. y el lado $\overline{AB}$ = 5m. Halla los ángulos del rombo y su otra diagonal.

F´) Desde un cierto punto del terreno se mira a lo alto de una montaña y la visual forma un ángulo de 50º con el suelo. Al alejarse 200 m de la montaña, la visual forma 35º con el suelo. Halla la altura, h, de la montaña.

G´) Simplifica: $\frac{1}{\cos x} - \cos x - tg^2 x \cdot \cos x$

H´) Simplifica: $\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{senx}$

I´) Simplifica: $\frac{\cos\alpha - \cos^3\alpha}{sen\alpha - sen^3\alpha}$

J´) El radio de la circunferencia circunscrita a un polígono regular mide 10 m. ¿Cuánto miden el lado y la apotema?

K´) Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 14 cm y 8 cm.

L´) Desde un barco se ve el punto más alto de un acantilado con un ángulo de 74º. Sabiendo que la altura del acantilado es de 200 m, ¿a qué distancia se halla el barco del pie del acantilado?

M´) Si la sombra de un poste es la mitad de su altura, ¿qué ángulo forman los rayos del sol con el horizonte?

N´) En un triángulo isósceles el lado correspondiente al ángulo desigual mide 7,4 m y uno de los ángulos iguales mide 63º. Halla la altura y el área.

Ñ´) Calcula el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente vale 0’7.

O´) Completa en tu cuaderno la siguiente tabla, haciendo uso de las relaciones fundamentales:

sen α	0,94		4/5			
cos α		0,82			$\sqrt{3}/2$	
Tg α				3,5		1

En las operaciones que te aparezcan radicales, trabaja con ellos; no utilices su expresión decimal.

P´) Calcula el valor exacto de las razones trigonométricas que faltan y el ángulo α:

sen α	1/3		
cos α		$\sqrt{2}/3$	
tg α			2
α			

Q´) Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento el avión se encuentra a una altura de 1.200 m y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de 30º. ¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si ésta mide 40 m de alto?

Soluciones

A) 49 m B) 30 cm y 28’5 cm. C) 1.200 km. D) 11,67 cm. E) 13 cm F) 24 m

G) 2,2 m; 2,75 m² H) 6,75 m I) 2,4 cm y 1,8 cm J) 216 m. K) 1:500

L) 3 cm.; $\sqrt{45}$ cm. y $\sqrt{11´25}$ cm. M) 24 cm.; 40 y 30 cm. Ñ) 5 cm.; 12 cm²

O) 8 cm.; 4´8 cm. ; 3´6 y 6´4 cm P) a) sen $\hat{A} = \sqrt{3}/2$ tg $\hat{A} = \sqrt{3}$ b) cos $\hat{A}$ =3/5 tg $\hat{A}$ =4/3

Q) a) 68º 11’ 55´´ b) 17º 27’ 27’’ c) 36º 52’ 12’’ R) a) 0,5678 b) 0,0850 c) 19,1397 d) 0,6894

S) a) α = 20º 13’ 7’’ b) α = 56º 15’ 17’’ c) α = 55º 32’ 24’’ d) α = 75º 31’ 21’’ e) α = 3º 34’’

T) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, tg\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ U) $sen\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}, tg\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ V) $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\text{sen}\,\alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$.

W) A = 90º C = 53º. b = 3’13 m y c = 4’15 m. X) C = 61º, a = 9’29 m, c = 8’12 m.

Y) $C = 36^{o}11'40''$. B = 53º48’19’’. c = 3’37m. Z) B = 51º20’24’’, a = 4’48m, C = 38º39’35’’.

A´) A = 73º18’27’’ y B = 106º41’. B) h = 38’4m. $\overline{AQ}$ = 64 m. C´) C = 39º, b = 9’01m, a = 11’60m.

D´) b = 3’40m, B = 47º37’24’’, C = 42º22’35’’. E´) 132º48’, 47º12’, 9’2m. F´): 339’6 m. G´) 0

H´) sen x I´) $tg\alpha$ J´) a = 8,09 m l = 11,76 m K´) 120º 30’ 36’’; 59º 29’ 23’’

L´) 57,35 m M´) 63º 26’ 6’’ N´) h = 7,26 m, S = 26,86 m² Ñ´) sen α = 0,57; cos α = 0,82 Q´) 2.340 m